

75 ЛЕТ ФИЗИЧЕСКОМУ ИНСТИТУТУ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА РАН

Тороидные упорядочения в кристаллах

Ю.В. Копаев

Рассмотрены фазовые переходы в упорядоченные состояния, соответствующие тороидному семейству мультиполей в электродинамике. Возможна как ситуация, когда образование тороидных моментов и их упорядочение происходят одновременно (как в случае сверхпроводимости), так и ситуация, когда сначала образуются тороидные моменты, а при более низкой температуре происходит их упорядочение. Кроме электродинамических тороидных моментов, соответствующих либо полоидальным зарядовым токам, либо спиновой конфигурации, возможно тороидное состояние, соответствующее полоидальным спиновым токам.

PACS numbers: 01.30.Bb, 71.30.+h, 75.10-b, 75.80+q

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200911d.1175

Содержание

1. Введение (1175).
 2. Группы временной и пространственной инверсии (1176).
 3. Мультипольные разложения в классической электродинамике (1176).
 4. Микроскопические модели тороидного упорядочения (1177).
4.1. Модель экситонного диэлектрика. 4.2. Структура спинового токового состояния. 4.3. Модель Хаббарда. 4.4. Теория ферми-жидкости.
 5. Магнитоэлектрические свойства тороидного состояния (1183).
 6. Диамагнитные аномалии в неоднородном тороидном состоянии (1183).
6.1. Подавление парамагнитной составляющей в отклике на магнитное поле. 6.2. Токовая прецессия неоднородных тороидных состояний (условие баланса сил). 6.3. Осцилляции де Гааза – ван Альфена в эффективном внутреннем магнитном поле — диамагнитная гигантская дифференциальная восприимчивость в слабом внешнем магнитном поле. 6.4. Сосуществование тороидного и сверхпроводящего состояний.
 7. Коллективные колебания и оптические свойства тороидных состояний (1188).
 8. Заключение (1188).
- Список литературы (1188).

1. Введение

Приведён обзор теоретических работ по спонтанным токам и соответствующим тороидным состояниям как в случае слабого межэлектронного взаимодействия с нестингом поверхностей Ферми (модель экситонного ди-

электрика), так и для предельно сильного взаимодействия (модель Хаббарда). Для промежуточного случая приведён ряд работ, в которых состояния со спонтанными токами получены в рамках теории ферми-жидкости.

В обзоре описаны магнитоэлектрические свойства тороидного состояния, характеризующегося аномально высокими значениями магнитоэлектрических коэффициентов. Именно это свойство и привлекло внимание специалистов по магнитоэлектричеству, что привело к обнаружению такого класса систем.

Коллективные тороидные моды характеризуются близостью или даже совпадением резонансных частот в диэлектрической и магнитной проницаемостях. В результате существует область частот, в которой отрицательным становится коэффициент преломления, т.е. тороидное состояние относится к классу метаматериалов.

В обзоре рассмотрено поведение тороидных состояний в магнитном поле. Однородное тороидное состояние имеет аномальный отклик вблизи точки фазового перехода на неоднородное магнитное поле или на внешний ток, являющийся по отношению к нему термодинамически сопряжённым полем. Аномальный же диамагнитный отклик на однородное магнитное поле имеет неоднородное тороидное состояние, в частности анти-тороидное.

Возможны две различные причины большого диамагнетизма неоднородных тороидных состояний.

В случае преобладания первых пространственных производных от тороидного момента в системе возникает эффективное магнитное поле (уже при отсутствии внешнего магнитного поля, в отличие от случая дробного квантового эффекта Холла). Если соответствующая этому полю эффективная магнитная длина оказывается меньше характерного масштаба неоднородности, то отклик на внешнее поле соответствует дифференциальной восприимчивости режима де Гааза – ван Альфена для большого эффективного магнитного поля. При этом отклик может соответствовать идеальному диамагнетизму.

Ю.В. Копаев. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 135-74-41
E-mail: kopaev@sci.lebedev.ru

Статья поступила 3 августа 2009 г.

В случае преобладания вторых производных, когда эффективная магнитная длина оказывается больше характерного масштаба неоднородности, отклик определяется прецессией токовых контуров большого корреляционного радиуса, плотно вложенных друг в друга. В этом случае в точке фазового перехода также возможен идеальный диамагнетизм.

2. Группы временной и пространственной инверсии

Фазовые переходы в кристаллах характеризуются понижением макроскопической симметрии с появлением соответствующего параметра порядка.

Кроме ранее известных пространственных операций симметрии, включая операцию пространственной инверсии $r \rightarrow -r$, Вигнером в 1932 г. [1] была введена операция инверсии времени. Аксиальные векторы магнитного поля \mathbf{H} и намагниченности \mathbf{M} меняют знак при операции $t \rightarrow -t$, а полярные векторы электрического поля \mathbf{E} и поляризации \mathbf{P} знака при этом не меняют. В ядерной физике в связи с реакциями по несохранению чётности при слабых взаимодействиях Я.Б. Зельдовичем [2] был введён классический образ свёрнутого в тор соленоида (анаполя), когда полярный вектор изменяет знак и при $t \rightarrow -t$, и при $r \rightarrow -r$. В физике конденсированного состояния на роль такого вектора Ашер [3, 4] предложил плотность тока \mathbf{j} . Существование вектора такой симметрии допускают кристаллы 31 класса (из 122 магнитных классов) точечной группы Шубникова; 13 из них допускают существование вектора \mathbf{M} . Ашер также указал на другие возможные векторы (импульс \mathbf{p} , скорость \mathbf{v} и др.) с такой симметрией. На основе замкнутых контуров таких спонтанных токов Ашер ошибочно пытался объяснить основные свойства сверхпроводников. Отметим, что ранее [5–8] ток \mathbf{j} предполагалось использовать в качестве параметра порядка для сверхпроводимости. Существование однородного тока для основного состояния равновесной системы противоречит известной теореме Блоха [9]. Рассмотренная Ашером [3, 4] ситуация с неоднородными токами противоречит условию градиентной инвариантности, поскольку вариация слагаемого $\mathbf{j}\mathbf{A}$ (\mathbf{A} — векторный потенциал) в выражении для свободной энергии по параметру порядка \mathbf{j} приводит к появлению в индуцируемом параметре и в энергии вклада, пропорционального вектор-потенциалу, чего быть не должно. Как было показано в работе [10], роль такого параметра порядка может играть полярный t -асимметричный вектор \mathbf{T} тороидного момента. Существование соответствующего мультиполя в электродинамике было впервые обнаружено в 1970-х годах группой В.М. Дубовика [11, 12]. Проявление тороидного момента в атомной физике впервые исследовано в работе [13].

Таким образом, из соображений симметрии для пространственно-временной инверсии можно ввести четыре параметра порядка:

1) t - и r -чётный аксиальный вектор \mathbf{G} . Примерами соответствующего вектора могут служить вектор \mathbf{n} в жидких кристаллах [14], параметр порядка в спиновых нематиках [15], аксиальный тороидный момент, обусловленный полоидальными спиновыми токами (см. раздел 4.2 и [16]), и вектор спонтанных механических напряжений в ферроэластиках;

2) t -чётный и r -нечётный полярный вектор \mathbf{P} электрической поляризации, описывающий сегнетоэлектрическое (ферроэлектрическое) состояние. Роль термодинамически сопряжённого поля играет электрическое поле \mathbf{E} , выстраивающее домены в одном направлении; отклик на электрическое поле расходитя в точке фазового перехода;

3) t -нечётный и r -чётный аксиальный вектор \mathbf{M} намагниченности. Роль термодинамически сопряжённого поля играет магнитное поле \mathbf{H} , выстраивающее магнитные домены ферромагнетика; отклик на магнитное поле расходитя в точке фазового перехода;

4) t -нечётный и r -нечётный полярный вектор \mathbf{T} , описывающий тороидное состояние. Роль термодинамически сопряжённого поля играет внешний ток \mathbf{j} , выстраивающий тороидные домены, отклик на ток расходитя в точке соответствующего фазового перехода.

3. Мультипольные разложения в классической электродинамике

Рассмотрим задачу о нахождении усреднённого по времени магнитного поля $\langle \mathbf{H}(\mathbf{R}) \rangle$ в точке \mathbf{R} при стационарном распределении классических электрических токов [18]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}),$$

движущихся со скоростями $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$ электронов в точках \mathbf{r}_{α} .

Для электродинамического вектор-потенциала $\langle \mathbf{A} \rangle$, удовлетворяющего условию $\langle \mathbf{H} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle$ и $\nabla \langle \mathbf{A} \rangle = 0$, получим [17]

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{c} \int d^3r \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_{\alpha}|} \right\rangle, \quad (1)$$

а его мультипольное разложение имеет вид

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \nabla)^n \frac{1}{R} \right\rangle. \quad (2)$$

Значение

$$\langle \mathbf{A} \rangle^0 = \frac{1}{c} \left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\rangle = 0,$$

так как среднее от производной по времени равно нулю;

$$\langle \mathbf{A} \rangle^{(1)} = -\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right),$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left\langle \sum_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}] \right\rangle$$

— магнитный дипольный момент системы.

Мультипольное разложение второго порядка представляет сумму квадрупольного q_{ij} члена

$$\langle A_i \rangle_{\text{quad}}^{(2)} = -\varepsilon_{ijk} q_{kl} \nabla_j \nabla_l \frac{1}{R},$$

где

$$q_{ij} = \frac{1}{6c} \left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} ([\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}]_j r_{\alpha j} + [\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}]_j r_{\alpha i}) \right\rangle, \quad (3)$$

и тороидного члена

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \rangle_{\text{tor}}^{(2)} &= \nabla(\mathbf{tV}) \frac{1}{R} + 4\pi \mathbf{t} \delta(\mathbf{R}), \\ \mathbf{t} &= \frac{1}{6c} \left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times [\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}]) \right\rangle = -\frac{1}{4c} \left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} r_{\alpha}^2 \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{4c} \left\langle \int d^3r r^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Чаще встречается следующая эквивалентная форма:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{10c} \left\langle \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}) - 2r_{\alpha}^2 \mathbf{j}_{\alpha}) \right\rangle. \quad (5)$$

Для систем, в которых магнитные поля индуцируются не движущимися зарядами, а спинами, ток *электрический* (а не ток *спинов*) определяется как вариационная производная энергии относительно векторного потенциала:

$$\mathbf{j}(r) = c \frac{\delta}{\delta \mathbf{A}} \left\{ -g\mu_B \int d^3r \mathbf{S}[\nabla \times \mathbf{A}] \right\}, \quad (6)$$

где g — гиромагнитное отношение, μ_B — магнетон Бора, $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ — спиновая плотность.

Подставляя $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ из (6) в (5), получим

$$\mathbf{t} = \frac{g\mu_B}{2} \left\langle \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{S}(\mathbf{r})] \right\rangle.$$

Взаимодействие H_{int} с магнитным полем $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r} = 0$ описывается следующим образом [17]:

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{m} \mathbf{H}(0) - \mathbf{t} [\nabla \times \mathbf{H}]_{r=0} - q_{ij} (\partial_i H_j + \partial_j H_i)_{r=0}. \quad (7)$$

Таким образом, взаимодействие тороидного момента происходит с $\text{rot} \mathbf{H}$, т.е. отлично от нуля только при наличии электрического тока. Так же, как и для электрической поляризации, имеются некоторые тонкости и в определении тороидного момента периодических систем [17].

В случае неоднородного тороидного момента $\mathbf{T}(r)$ спонтанный макроскопический ток имеет форму [12]

$$\mathbf{j}(r) = \text{rot rot } \mathbf{T}(\mathbf{r}). \quad (8)$$

В заключительной части статьи [12] представлен обзор работ по состоянию на 1990 г., посвящённых проявлению тороидных моментов в области атомной и ядерной физики, физики элементарных частиц, включая лептоны и кварки, Z- и W-бозоны.

4. Микроскопические модели тороидного упорядочения

4.1. Модель экситонного диэлектрика

Впервые вопрос о возникновении упорядоченных токовых состояний был рассмотрен в работе [19] на основе двухзонной модели с совпадающими в импульсном пространстве поверхностями Ферми (нестинг поверхностей Ферми) электронов и дырок — модели экситонного диэлектрика [20].

Особенностью этой модели является то, что при температуре ниже некоторой критической (T_c) образуются с одновременной бозе-конденсацией пары из электрона и дырки, что приводит к образованию диэлектрического (полупроводникового) состояния с возникновением диэлектрической щели Δ как параметра порядка. При идеальном нестинге это решение возникает даже при сколь угодно слабом кулоновском взаимодействии и является асимптотически точным. Формально решение аналогично полученному в теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [21] для сверхпроводящего электрон-электронного (куперовского) спаривания за счёт электрон-фононного (а не кулоновского) взаимодействия, а ослабленное "толмачевским" логарифмом [22] кулоновское взаимодействие такому спариванию препятствует.

Кроме этого, существуют и другие принципиальные отличия от куперовского сверхпроводящего спаривания:

1) поскольку для электрона относительно дырки нет запрета Паули, то имеется вырождение относительно синглетного и триплетного спариваний;

2) поскольку спаривание происходит между состояниями из разных зон, вообще говоря, с блоховскими функциями различной симметрии, то физические свойства образующегося диэлектрического состояния будут зависеть от относительной симметрии волновых функций этих зон, вернее, от типа отличных от нуля межзонных матричных элементов;

3) межзонные матричные элементы (гибридизация) могут фиксировать фазу диэлектрического параметра порядка [23], от чего будут зависеть физические свойства системы.

Заметим, что в случае сверхпроводящего спаривания фаза параметра порядка остаётся произвольной (что, кстати, и важно для проявления сверхпроводящих свойств), а проявляется градиент фазы, обуславливающий величину сверхпроводящего тока.

В результате параметр порядка может быть представлен в виде матрицы $\hat{\Delta}$ в спиновом пространстве:

$$\hat{\Delta} = \Delta_{\text{Re}}^s + i\Delta_{\text{Im}}^s + \boldsymbol{\sigma} (\Delta_{\text{Re}}^t + i\Delta_{\text{Im}}^t),$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор из матриц Паули, $\Delta_{\text{Re,Im}}^s$ — синглетная действительная и мнимая компоненты параметра порядка, $\Delta_{\text{Re,Im}}^t$ — триплетная действительная и мнимая компоненты.

Заметим ещё раз, что физические свойства системы будут зависеть не только от того, какой из этих четырёх параметров или их комбинация будут соответствовать основному состоянию, но и от типа отличных от нуля межзонных матричных элементов. В работе [19] было отмечено, что Δ_{Im}^s и Δ_{Im}^t могут быть связаны с токовыми состояниями, но характер этих токовых состояний и структура матричных элементов не исследовались.

Какая из этих четырёх компонент параметра порядка или их комбинация будет реализована, зависит от соотношения внутризонных и межзонных кулоновских и электрон-фононных взаимодействий [24, 25], рассеяния на примесях [26], спин-орбитального взаимодействия [27], нарушения условия идеального нестинга, например, за счёт легирования [28], структуры доменных стенок в сегнетоэлектрике [29–31].

Вопрос о структуре токовых состояний в случае отличного от нуля межзонного матричного элемента импульса p_{12} был рассмотрен в работе [32]. В этой

работе в выражении для тока были учтены только межзонные составляющие (это казалось естественным, поскольку параметр порядка определяется межзонным электронно-дырочным спариванием), что привело к наличию однородной компоненты тока.

Этот результат, с одной стороны, являлся как бы микроскопическим подтверждением полученных феноменологически результатов [3–8], где ток (в данном случае через комбинацию $p_{12}A_{\text{Im}}^s$) отождествлялся с параметром порядка A_{Im}^s . Но, с другой стороны, этот результат противоречит (как было отмечено выше) как теореме Блоха, так и условию калибровочной инвариантности. Возникла даже некоторая дискуссия [33–35] по устранению однородного тока. В статье [33] была предложена процедура переопределения оператора тока за счёт обменной энергии. В статье [28] было показано, что обменная поправка вклада в средний ток не даёт.

В работе [35] для устранения однородного тока была выбрана иная, чем в [32], модель, когда межзонный оператор импульса меняет знак при движении по зоне Бриллюэна.

В действительности же компенсация однородной межзонной компоненты, полученной в [32], происходит в меру внутризонных компонент тока [36], возникающих вследствие "косого" характера электронного спектра, содержащего несимметричную по импульсу \mathbf{p} компоненту $\mathbf{p}_{12}A_{\text{Im}}^s$, на которую не было обращено внимания в работе [32].

Спектр электронных возбуждений в диэлектрической фазе имеет следующий вид (рис. 1):

$$E(p) = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + |\mathbf{i} \mathbf{p}_{12} \mathbf{p} - A_{\text{Im}}^s(T)|^2}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_1(p) = -\varepsilon_2(p) \equiv \varepsilon(p)$.

В работе [36] было получено выражение для тока при неоднородном параметре порядка $A_{\text{Im}}^s(r)$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{rot rot } \mathbf{p}_{12} A_{\text{Im}}^s. \quad (10)$$

Из сравнения выражения для тока (10) с выражением (8) видно, что именно комбинация $\mathbf{p}_{12} A_{\text{Im}}^s$ является тороидным параметром порядка (на это обратил внима-

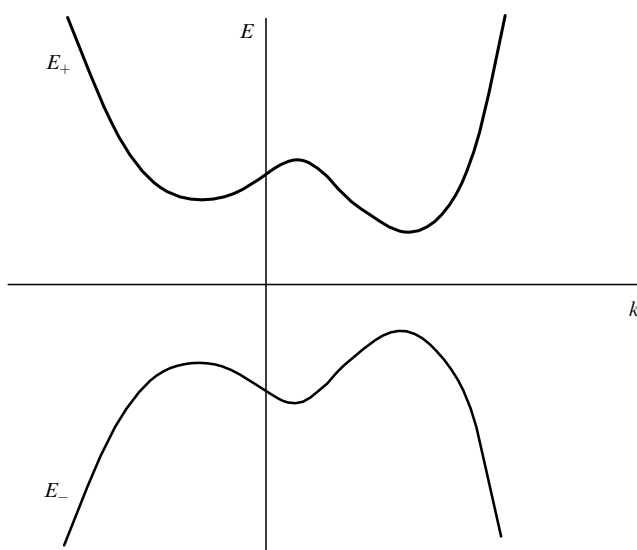


Рис. 1.

ние В.Л. Гинзбург):

$$\mathbf{T} = \mathbf{p}_{12} \frac{A_{\text{Im}}^s}{m_0}. \quad (11)$$

Более общее доказательство отсутствия однородного тока в состоянии с $\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \text{const}$ было дано в работе [28]. Показано, что для калибровочно-инвариантного локального гамильтониана со взаимодействием, зависящим только от разности координат, все три способа определения оператора тока $\hat{\mathbf{j}}$:

- из уравнения движения для оператора координаты $\hat{\mathbf{r}}$ $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i}[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}], \quad (12)$

- из уравнения непрерывности для оператора плотности заряда $e\hat{n}(\mathbf{r})$

$$\frac{\partial e\hat{n}(\mathbf{r})}{\partial t} = \mathbf{i}[\hat{H}, e\hat{n}(\mathbf{r})] \equiv -\text{div } \hat{\mathbf{j}} \quad (13)$$

- и из вариации \hat{H} по вектор-потенциалу $\hat{\mathbf{A}}$

$$\hat{\mathbf{j}} = c \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\mathbf{A}}} \quad (14)$$

приводят к одному и тому же результату (10).

При этом было показано, что в случае легирования возникает вклад в ток также от антисимметричной по импульсу электронов действительной части A_{Re}^s параметра порядка.

До сих пор рассматривался случай, когда волновые функции электронной (1) и дырочной (2) зон имели противоположную чётность и межзонный матричный элемент импульса p_{12} был отличен от нуля.

В случае же зон одинаковой чётности $\mathbf{p}_{12} \equiv 0$ и от нуля отличен межзонный матричный элемент оператора орбитального момента.

В этом случае электронный спектр оказывается симметричным по импульсу, внутризонные компоненты тока $\mathbf{j}_{11} = \mathbf{j}_{22} = 0$ и выражение для тока имеет вид [37]

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_{21} = \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (15)$$

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{i}A_{\text{Im}}^s \frac{1}{g_{\text{Im}}^s}, \quad (16)$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \mu_B \sum_{n \neq 1,2} \left(\frac{1}{E_1 - E_n} + \frac{1}{E_2 - E_n} \right) \frac{[\mathbf{p}_{1n} \times \mathbf{p}_{n2}]}{m_0}, \quad (17)$$

где m_0 — масса свободного электрона, E_1 — положение точки минимума зоны 1, E_2 — положение максимума зоны 2, \mathbf{p}_{1n} и \mathbf{p}_{n2} — матричные элементы оператора импульса зон 1 и 2 соответственно, с другими зонами n , g_{Im}^s — соответствующая параметру A_{Im}^s эффективная константа связи.

Таким образом, в данном случае в диэлектрической фазе возникает ферромагнитное состояние целиком заполненной зоны.

4.2. Структура спинового токового состояния

В случае мнимого триплетного параметра порядка A_{Im}^t , отличного от нуля межзонного матричного элемента \mathbf{p}_{12} и $\Delta = \mathbf{i}\sigma A_{\text{Im}}^t$ при $\mathbf{p}_{12} \parallel 0Z \parallel \Delta_{\text{Im}}^t$ спектр электронных возбуждённых состояний имеет следующий вид [38] (рис. 2):

$$E_{\pm}^2(p) = \varepsilon^2(p) + \left(\frac{1}{m_0} p_{12} p_z \pm A_{\text{Im}}^t \right)^2, \quad (18)$$

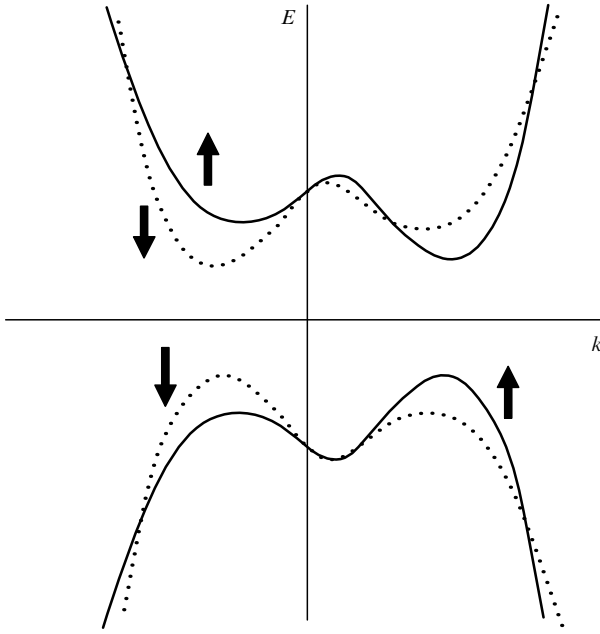


Рис. 2.

где знаки \pm соответствуют противоположным ориентациям спинов.

Поток спинов описывается тензором второго ранга

$$\mathbf{J}_a^s = \langle \sigma_a \hat{\mathbf{j}} \rangle, \quad (19)$$

где σ_a — матрица Паули ($a = x, y, z$), $\hat{\mathbf{j}}$ — оператор плотности тока.

Макроскопическая симметрия состояния с плотностью потока спина характеризуется не локальным значением тензора J_a^s , а симметрией его пространственного распределения в элементарной ячейке кристалла. Величина J_a^s инвариантна (в противоположность току заряда) относительно обращения времени. Однако полной группой симметрии является не обычная группа пространственной симметрии, а "цветная" группа, включающая дополнительно операции вращения и отражения в спиновом пространстве. Если спиновая компонента тензора J_a^s не зависит от координат (т.е. спины всех частиц, дающих вклад в спиновый поток, параллельны), то симметрия состояния с $J_a^s \neq 0$ описывается особенно просто. Направим ось спинов по оси симметрии кристалла. Тогда дополнительной операцией симметрии является поворот в спиновом пространстве на угол π . Эта операция полностью эквивалентна инверсии координат в обычном пространстве. Спиновый поток удобно представить в виде двух равных по величине потоков частиц с одним знаком заряда, но с противоположным спином, текущих навстречу друг другу. Поэтому, как и в рассмотренном случае тока заряда, легко убедиться, что выражение для однородного тока спина сводится к интегралу в импульсном пространстве от полной производной. Таким образом, однородный ток спинов равен нулю.

Для неоднородного спинового тока, как и для тока заряда, удобно выделить тороидальную и полоидальную компоненты. Полоидальной конфигурации отвечает группа симметрии псевдоскаляра $\sigma \mathbf{T}$ (где \mathbf{T} — нечётный по времени полярный вектор тороидного магнитного момента).

Таким образом, тороидный момент спиновых токов T_s следующим образом (см. (11)) выражается через Δ_{Im}^t :

$$T_s = \sigma \mathbf{T} = \frac{p_{12}}{m_0} \Delta_{\text{Im}}^t. \quad (20)$$

Следовательно, T_s , обусловленный параметром порядка Δ_{Im}^t , является ещё одним примером рассмотренного в разделе 2 аксиального вектора \mathbf{G} .

В работе [38] показано, что в таком состоянии при наличии электрического тока I возникает асимметрия по импульсу в распределении носителей, приводящая к возникновению суммарной намагниченности $M \sim I p_{12} \Delta_{\text{Im}}^t$ — токомагнитный эффект (аналог рассмотренному в разделе 5 магнитоэлектрическому эффекту для тороидов с током заряда).

Случай действительного синглетного параметра Δ_{Re}^s при $p_{12} \neq 0$ соответствует возникновению электрической поляризации, т.е. сегнетоэлектричеству [39].

При несовпадающих на величину \mathbf{q} в импульсном пространстве электронной (1) и дырочной (2) зонах при $\varepsilon_1(\mathbf{p}) = -\varepsilon_2(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ или в однозонной схеме при $\varepsilon(\mathbf{p}) = -\varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ параметру порядка Δ_{Re}^s соответствует возникновение волны зарядовой плотности (ВЗП), а параметру Δ_{Re}^t соответствует возникновение волны спиновой плотности (ВСП), отвечающей за спиновый антиферромагнетизм. Примерами такого состояния являются хром и его сплавы.

Известны многочисленные примеры реализации ВЗП в квазиодномерных и слоистых системах.

Сосуществование ВЗП и ВСП [40] обеспечивает реализацию ферромагнитного спинового состояния, примером которого являются гексабориды [42].

Объяснение природы этих ферромагнетиков на основе модели [40] было дано в работах [43, 44]. Имеются основания считать, что в таких системах тороидное состояние может конкурировать с ферромагнитным.

Приведённые известные примеры реализации электронно-дырочного спаривания при действительных параметрах порядка Δ_{Re}^s и Δ_{Re}^t могут оказаться полезными в поисках систем с тороидными упорядочениями, имея в виду отмеченные в разделе 4.1 условия, благоприятствующие реализации токовых состояний. В связи с этим следует отметить недавно появившуюся статью [41], в которой сообщается об обнаружении состояния экситонного диэлектрика в TiSe_2 . В работе [45] для объяснения псевдощелевого состояния купратов была предложена модель со спонтанными токами в однозонной схеме с $\varepsilon(p) = -\varepsilon(p + q)$ с d -типом диэлектрического параметра (DDW — d -density wave) с удвоением периода.

С той же целью похожая модель со спонтанными токами по соседним связям без изменения периода была рассмотрена в [46, 47]. Имеются эксперименты, подтверждающие такую точку зрения [48, 49].

В работе [50] указаны магнитные классы, в которых тороидные состояния возникают в результате электронно-дырочного спаривания в двухзонной модели на фоне антиферромагнитного состояния, обусловленного локализованными спинами. Соответствующее рассмотрение на фоне ферромагнитного упорядочения локализованных спинов проведено в работе [51].

В работе [52] дана классификация магнитных материалов, допускающих тороидное упорядочение вблизи поверхности кристаллов. Примером такого упорядоче-

ния является хром, в котором характерная для тороидного состояния асимметрия электронного спектра $E(\mathbf{k}) \neq E(-\mathbf{k})$ наблюдалась в экспериментах по фотоэмиссии с угловым разрешением [53].

На тороидное упорядочение вблизи поверхности ферромагнетиков Fe и EuO указывает асимметрия спектра спиновых волн, наблюдавшаяся в оптических экспериментах по рассеянию Манделштама – Бриллюэна [54].

4.3. Модель Хаббарда

В противоположном рассмотренной модели экситонного диэлектрика предельном случае сильного взаимодействия задача получения точного решения существенно усложняется. Однако за последние 20 лет предприняты громадные усилия в разработке различных как аналитических, так и численных методов описания основного состояния и основных физических свойств систем в предельном случае сильного взаимодействия. Эти усилия были обусловлены необходимостью понимания как природы сверхпроводимости купратов, так и природы магнитных свойств манганатов, обладающих колоссальным магнетосопротивлением.

Впервые в модели Хаббарда решение со спонтанными токами (flux phase) было получено в работе [55]. Впоследствии был предложен целый ряд методов, в основном в схемах разделения зарядовых и спиновых степеней свободы, решениями в которых были неоднородные токи зарядов и спинов. Соответствующую литературу можно найти в обзоре [56].

Следует особо выделить работу [57], в которой получено решение со спонтанными, циркулирующими по ближайшим химическим связям токами для моттовского диэлектрика. Причём, в отличие от других работ со спонтанными токами, для моттовского диэлектрика предложена структура, допускающая строгое решение. Речь идет о системах, в основе которых имеется треугольная структура с отличной от нуля средней скалярной киральностью:

$$\langle \chi_{123} \rangle = \langle [\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2] \mathbf{S}_3 \rangle, \quad (21)$$

где 1, 2, 3 — номера узлов этой треугольной структуры, \mathbf{S}_i — оператор спина на i -м узле.

В работе [57] имеются ссылки на статьи, в которых наличие такого среднего приводит к спонтанным токам в другой подсистеме (не хаббардовской) с электронами проводимости, что само по себе представляет интерес в связи с обсуждаемой нами проблемой. В этой же работе скалярная киральность и орбитальные токи обусловлены одними и теми же электронами.

Если ввести оператор спина на i -м узле,

$$S_i^\eta = \sum_{\mu\nu} C_{i\mu}^+ \sigma_{\mu\nu}^\eta C_{i\nu}, \quad (22)$$

где $\eta = \{x, y, z\}$, $\sigma_{\mu\nu}^\eta$ — матрицы Паули, $C^+(C)$ — операторы рождения (уничтожения) электрона, то гамильтониан в таком представлении (один электрон на узле, а степень свободы только по спину) имеет вид

$$H = \sum_{ij} J_{ij} \left(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \frac{1}{4} \right), \quad (23)$$

где $J_{ij} = 4t_{ij}^2/U$, t_{ij} — интеграл перескока между i - и j -узлами, U — взаимодействие двух электронов на узле.

Тогда оператор тока между узлами i и j имеет вид

$$\hat{I}_{ij} = \frac{\sqrt{-1}et_{ij}\mathbf{r}_{ij}}{\pi r_{ij}} \sum_{\sigma} (C_{j\sigma}^+ C_{i\sigma} - C_{i\sigma}^+ C_{j\sigma}) \quad (24)$$

и для вклада в ток по треугольнику 1–2–3 от связи 1–2 получим

$$\hat{I}_{123} = \frac{\mathbf{r}_{12}24et_{12}t_{23}t_{31}}{r_{12}\hbar U^2} [\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2] \mathbf{S}_3. \quad (25)$$

Уравнение (25) показывает, что наличие спиновой киральности на треугольной структуре обеспечивает орбитальный ток. Этот ток приводит к отличному от нуля магнитному моменту L_z , направленному перпендикулярно плоскости треугольника, причём момент $\langle L_z \rangle$ будет пропорционален углу, сформированному векторами $\langle \mathbf{S}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{S}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{S}_3 \rangle$. Отметим, что такое состояние возникает при сколь угодно малом параметре t_{ij}/U .

Рассмотренные условия являются как бы аналогом условия нестинга в модели экситонного диэлектрика при отличном от нуля межзонном матричном элементе оператора углового момента, что приводит к появлению намагниченности в противоположном предельном случае сколь угодно слабого взаимодействия при $\Delta_{\text{Im}}^s \neq 0$ и $L_{12} \neq 0$ [37].

В работе [17] показано, что линейная комбинация с комплексным коэффициентом состояний с противоположной скалярной спиновой киральностью приводит к возникновению тороидного момента. Фазовый переход в упорядоченное состояние с тороидным моментом будет отличаться от фазового перехода, рассмотренного в разделе 4.1 в модели экситонного диэлектрика при $\Delta_{\text{Im}}^s \neq 0$ и $p_{12} \neq 0$, когда образование тороидных моментов и их упорядочение (бозе-конденсация) должны происходить одновременно в точке фазового перехода.

В работе [57] также показано, что при другой спиновой структуре в треугольнике возможно сегнетоэлектрическое (ферроэлектрическое) состояние в пределе сколь угодно малого t/U .

Если ввести оператор $\delta n_i = n_i - 1$ отклонения числа электронов на узле от единицы (отметим, что обычно это отклонение считается равным нулю в пределе $t/U \ll 1$), то получим, например, для $i = 1$

$$\delta n_1 = n_1 - 1 = 8 \frac{t_{12}t_{23}t_{31}}{U^3} [\mathbf{S}_1(\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 - 2\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3)]. \quad (26)$$

Таким образом, если среднее значение от выражения в квадратных скобках отлично от нуля, то на одних узлах будет $\langle n_i \rangle > 1$, на других — $\langle n_j \rangle < 1$ (конечно, при условии $\sum_{i=1}^3 \delta n_i = 0$).

Тогда в структуре возникает электрическая поляризация, при упорядочении которой произойдёт фазовый переход в сегнетоэлектрическое состояние. Отметим, что в модели экситонного диэлектрика такое состояние возникает при $\Delta_{\text{Re}}^s \neq 0$ и $p_{12} \neq 0$.

В работе [58] предложен механизм возникновения спинового бездиссипативного тока (spin supercurrent) в спиновом неколлинеарном магнетике.

Продемонстрирована возможная аналогия между магнитным и сверхпроводящим упорядочением. Как известно, для сверхпроводников операторы числа частиц n_i и джозефсоновской фазы φ_i канонически сопряжены: $[n_i, \varphi_j] = \sqrt{-1}\delta_{ij}$, где i, j — индексы узлов.

Подобное соотношение существует для спиновых операторов: $[S_i^z, \Theta_j] = \sqrt{-1} \delta_{ij}$, где S^z является z -компонентой оператора спина, а Θ есть угол вектора (S^x, S^y) . Это приводит к связи между XY -спиновой моделью и сверхпроводимостью.

Гамильтониан в XY -модели имеет вид

$$H_{XY} = \sum_{(ij)} \frac{J_{ij}}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+). \quad (27)$$

Из выражения

$$\frac{\partial S_i^z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-1} \hbar} [S_i^z, H_{XY}] = - \sum_j J_{ij}^s \quad (28)$$

получим выражение для спинового тока J_{ij}^s :

$$J_{ij}^s = \sqrt{-1} J_{ij} (S_i^+ S_j^- - S_i^- S_j^+). \quad (29)$$

Выражая $(S_j^x, S_j^y) = S(\cos \Theta_j, \sin \Theta_j)$, получим

$$J_{ij}^s = J_{ij} S^2 \sin(\Theta_i - \Theta_j). \quad (30)$$

Уравнение (30) является аналогом уравнения Джексона для сверхпроводящего тока между двумя сверхпроводниками с фиксированной разностью фаз. Величина $J_{ij} S^2$ играет роль спиновой жёсткости. При этом возникает также электрическая поляризация. При наложении внешнего электрического поля появляется намагниченность. Таким образом система является магнетоэлектриком.

4.4. Теория ферми-жидкости

В разделах 4.1 и 4.3 было показано, что состояния со спиновыми токами и тороидные упорядоченные состояния возможны как в рамках предельно слабого взаимодействия с особым видом (нестинг) электронного спектра, так и в обратном пределе сильного взаимодействия. С ростом величины взаимодействия требования на особый вид электронного спектра становятся всё менее жёсткими. Поэтому ясно, что в промежуточной ситуации такие упорядоченные состояния остаются возможными.

На это указывают результаты ряда работ, где подобные состояния получены в рамках теории ферми-жидкости Ландау. В центре внимания оказалась работа И. Померанчука [59] по так называемым нестабильностям Ландау–Померанчука поверхностей Ферми, обусловленным нарушениями симметрий вращения в электронных жидкокристаллических состояниях, в связи со "скрытыми" упорядочениями в системах с тяжёлыми фермионами. В рамках такого подхода в работе [60] продемонстрирован переход в диэлектрическое состояние с анизотропной щелью. Тот или иной вид нестабильности и соответствующий ей вид упорядоченного состояния определяются превышением критического значения некоторого коэффициента в теории ферми-жидкости. Отметим, что соответствующие коэффициенты в электронно-дырочном рассеивательном канале при условии нестинга поверхности Ферми являются расходящимися даже при сколь угодно слабом взаимодействии. Аналогичная ситуация имеет место в сверхпроводящем канале рассеяния с нулевым импульсом пар при произвольной форме поверхности Ферми, а для конечного импульса

сверхпроводящих пар — при выполнении условия зеркального нестинга на форму поверхности Ферми [61].

Все рассмотренные в разделе 4.1 типы упорядоченных состояний естественно можно получить в рамках теории ферми-жидкости. В связи с проявлениями нестабильностей Ландау–Померанчука выделим работу [62], в которой, в частности, в триплетном канале с равным единице угловым моментом получено упорядоченное состояние, соответствующее нарушению "спин-орбитальной симметрии", когда спин-орбитальное взаимодействие возникает не как релятивистский эффект, а как результат межэлектронных корреляций уже в нерелятивистском пределе. Ранее такое состояние было известно только в теории сверхтекучести ^3He .

Оператор спинового тока имеет в этом случае следующий вид (ср. с (19) в разделе 4.2):

$$Q^{\mu a}(\mathbf{r}) = \Psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha\beta}^{\mu} (-i \hat{\nabla}^a) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (31)$$

где индексы α, β, μ означают направление в спиновом пространстве, индекс a — в орбитальном пространстве.

Гамильтониан в канале F_1^a с $l = 1$ имеет вид

$$H = \int d^3 r \Psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}) (\varepsilon(\nabla) - \mu) \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) + h_{\mu a} Q^{\mu a}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3 r d^3 r' f_1^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') Q^{\mu a}(\mathbf{r}) Q^{\mu a}(\mathbf{r}'), \quad (32)$$

где μ — химический потенциал, $\varepsilon(\nabla)$ — оператор кинетической энергии, $h_{\mu a}$ — термодинамически сопряжённое спиновому току $Q^{\mu a}$ (спин-орбитальное) внешнее поле, т.е. как бы бесконечно малое "внешнее" релятивистское взаимодействие наводит в точке T_c соответствующего фазового перехода большое нерелятивистское спин-орбитальное взаимодействие.

Подобную же роль играет магнитное поле для ферромагнетика, электрическое поле для сегнетоэлектрика, электрический ток (как отмечалось в разделе 4.1) для тороидного магнитного состояния.

Для дальнейшего оказывается существенным в законе дисперсии $\varepsilon(\mathbf{k})$ удерживать кроме линейного ещё и кубическое слагаемое

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = v_F \Delta k \left[1 + b \left(\frac{\Delta k}{k_F} \right)^2 \right],$$

где $\Delta k = k - k_F$; k_F и v_F — импульс и скорость электрона на поверхности Ферми соответственно.

Компонента Фурье $f_1^a(\mathbf{q})$ функции $f_1^a(\mathbf{r})$ имеет вид

$$f_1^a(\mathbf{q}) = \frac{f_1^a}{1 + \chi |f_1^a| q^2}, \quad (33)$$

безразмерный параметр Ландау $F_1^a = N f_1^a$, N — плотность состояний на уровне Ферми.

Определим спин-орбитальную восприимчивость

$$\chi_{\mu a, \nu b} = \frac{\langle Q_{\mu a} \rangle}{h_{\nu b}}$$

в пределе $h_{\nu b} \rightarrow 0$ как диагональную часть

$$\chi_{\mu a, \nu b} = \chi_0 \delta_{\mu a} \delta_{\nu b}.$$

Тогда ферми-жидкостная поправка χ_{FL} имеет вид

$$\chi_{FL} = \chi_0 \frac{m^*}{m_0} \frac{1}{1 + F_1^a/3}.$$

Восприимчивость χ_{FL} расходится при $F_1^a = -3$.

Если ввести параметр порядка как

$$n^{\mu a}(\mathbf{r}) = - \int d^3 r' f_1^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle Q^{\mu a}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (34)$$

то получим при $h_{\mu a} = 0$ гамильтониан среднего поля H_{MF}

$$H_{MF} = \int d^3 r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) (\varepsilon(\nabla) - n^{\mu a} \sigma^\mu (-i\nabla^a) - \mu) \Psi(\mathbf{r}) + V n^{\mu a} \frac{n^{\mu a}}{2|f_1^a|}, \quad (35)$$

а уравнение для самосогласованного параметра порядка имеет вид

$$n^{\mu a} = |f_1^a| \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \langle \Psi^\dagger(k) \sigma^\mu \hat{k}^a \Psi(k) \rangle. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет два решения:

$$n^{\mu a} = \begin{cases} \bar{n} \hat{d}_\mu \hat{e} & \text{для } \alpha\text{-фазы,} \\ \bar{n} D_{\mu a} & \text{для } \beta\text{-фазы,} \end{cases} \quad (37)$$

где \hat{d} и \hat{e} — единичные векторы в спиновом и орбитальном пространстве, $D_{\mu a}$ — SO(3) матрица вращения [62], \bar{n} — действительное число.

Таким образом, выражение

$$\langle Q^{\mu a}(\mathbf{r}) Q^{vb}(\mathbf{r}') \rangle \rightarrow \delta_{\mu\nu} \delta_{ab} \frac{\bar{n}^2}{|f_1^a|^2} \begin{cases} \hat{d}_\mu \hat{e}_a & \text{в } \alpha\text{-фазе,} \\ D_{\mu a} & \text{в } \beta\text{-фазе,} \end{cases} \quad (38)$$

при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ определяет недиагональный дальний порядок.

При $\bar{n}^{\mu a} = \bar{n} \delta_{\mu z} \delta_{az}$ имеем следующий закон дисперсии:

$$E^A(k)_{12} = \varepsilon(k) - \mu \pm \bar{n} \cos \Theta, \quad (39)$$

где Θ — угол между вектором \mathbf{k} и осью z .

Выражение (39) формально совпадает с приведённым ранее выражением (18) для закона дисперсии в случае тороида спиновых токов, которое было получено для триплетного мнимого порядка с $l = 0$, но для $p_{12} \neq 0$ [38]. Это решение также совпадает со спин-расщеплённым состоянием [63], которое было достаточно обоснованно использовано для объяснения особенностей фазового перехода в хроме при температуре Нееля $T_N = 311$ К вместо обычно трактуемого как фазовый переход в состояние спиновой волны при реальном триплетном Δ_{Re}^l параметре порядка.

Отметим также, что утверждение автора [63] о наличии однородного спинового тока в таком состоянии за счёт "косого" спектра (39) является неверным. Доказательство этого утверждения состоит, как и в случае Δ_{Im}^s при $p_{12} \neq 0$, приведённом в разделе 4.1, в сведении выражения для тока каждой спиновой компоненты к интегралу от полной производной. Подобный же вопрос возникал в задаче о ^3He .

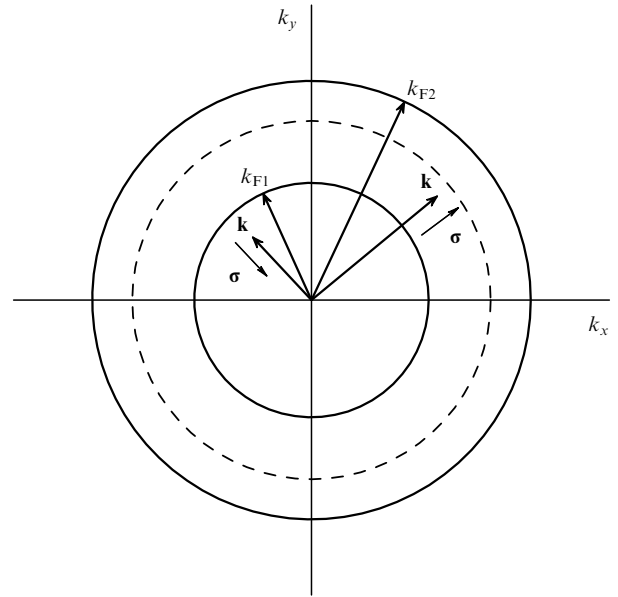


Рис. 3.

Совершенно новым является решение для β -фазы.

В этом состоянии не нарушена ни пространственная, ни временная инверсия, ни симметрия вращения. Для случая $n^{\mu z} = \bar{n} \delta_{\mu z}$ выражение для гамильтониана среднего поля H_{MF} сводится к следующему:

$$H_{MF} = \sum_k \Psi^\dagger(\mathbf{k}) (\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu - \bar{n} \sigma \hat{\mathbf{k}}) \Psi(\mathbf{k}). \quad (40)$$

Закон дисперсии $E_{12}^B(\mathbf{k})$ для собственных состояний ± 1 скалярной киральности оператора $\sigma \hat{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$E_{12}^B(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu \pm \bar{n}. \quad (41)$$

Подобно состоянию ^3He фазы В закон дисперсии — изотропный. На рисунке 3 в соответствии с выражением (41) пунктиром изображён контур Ферми нормальной фазы ($\bar{n} = 0$). Для состояния с k_{F2} направление спина электрона совпадает с направлением импульса (положительная киральность), а для состояния k_{F1} эти направления противоположны (отрицательная киральность). Несмотря на внешнюю похожесть на ферромагнитное состояние, суммарный спин для обоих случаев (k_{F1} и k_{F2}) равен нулю.

Последнее слагаемое в выражении (40) для H_{MF} соответствует спин-орбитальному взаимодействию, определяется только межэлектронными корреляциями и никак не связано с релятивизмом. Поэтому оно может быть большим, особенно вблизи температуры соответствующего фазового перехода.

Фаза α реализуется при коэффициенте $b < 1/3$ в затравочном законе дисперсии (т.е. и при $b = 0$).

Фаза β может реализовываться при $b > 1/3$, т.е. при значительном отклонении затравочного закона дисперсии от линейного.

Естественно, в модели экситонного диэлектрика для триплетного мнимого параметра порядка с угловым моментом $l = 1$ такое состояние получается при сколь угодно слабом взаимодействии. Но вопрос о конкуренции с другими состояниями требует подробного исследова-

дования. Впрочем, этот вопрос существует и в рамках теории ферми-жидкости.

5. Магнитоэлектрические свойства тороидного состояния

К семейству магнетоэлектриков относятся вещества, в которых под действием магнитного поля \mathbf{H} возникает электрическая поляризация \mathbf{P} , а под действием электрического поля \mathbf{E} возникает намагничённость \mathbf{M} (см. обзор [64]).

Из выражения для свободной энергии $F(\mathbf{E}, \mathbf{H})$,

$$F(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = F_0 - \frac{\varepsilon_{ij} E_i E_j}{8\pi} - \frac{\mu_{ij} H_i H_j}{8\pi} - \alpha_{ij} E_i H_j, \quad (42)$$

следует

$$P_i = \chi_{ij}^e E_j + \alpha_{ij} H_j, \quad (43)$$

$$M_i = \alpha_{ij} E_j + \chi_{ij}^m H_j,$$

где $\chi_{ij}^e = (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})/4\pi$ и $\chi_{ij}^m = (\mu_{ij} - \delta_{ij})/4\pi$ — диэлектрическая и магнитная восприимчивости соответственно, α_{ij} — магнитоэлектрический тензор. Термин магнитоэлектричество был введён Дебаем [65]. Симметричная классификация кристаллов с точки зрения магнитоэлектричества была выполнена П. Кюри [66]. Тензор $\alpha_{ij} \neq 0$ для 58 из 122 магнитных классов.

В работе [67] была предсказана возможность магнитоэлектричества в кристалле Cr_2O_3 , а в работе [68] этот эффект был впервые обнаружен.

Из соображений симметрии магнитоэлектричество должно существовать в тороидном состоянии:

$$\mathbf{P} = [-\mathbf{T} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{M} = [\mathbf{T} \times \mathbf{E}], \quad (44)$$

т.е. должна быть отличной от нуля и антисимметричной недиагональная компонента магнитоэлектрического тензора ($\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$) [69].

Физическая природа возникновения магнитоэлектрического эффекта в тороидном состоянии, а также антисимметрия и недиагональность (поперечность) магнитоэлектрического эффекта [70] проиллюстрированы на рис. 4.

На рисунке 4а изображено равномерное распределение колец полоидального тока в отсутствие магнитного поля. Рисунок 4б соответствует включению в плоскости тора магнитного поля \mathbf{H} . По топологическим причинам разворот полоидальных колец с магнитным моментом, ориентированным против поля \mathbf{H} , должен сопровождаться их перетеканием справа налево.

В результате избытка электронов слева происходит электрическая поляризация \mathbf{P} . Возникновением электри-

ческой поляризации ограничивается парамагнитная компонента магнитной восприимчивости в отклике на поле \mathbf{H} , что будет обсуждаться в разделе 6, посвящённом анализу диамагнетизма тороидного состояния.

Из условия термодинамической устойчивости [17] следует верхний предел на величину α_{ij} :

$$\alpha_{ij} \leq \sqrt{\chi_{ii}^e \chi_{jj}^m}. \quad (45)$$

Повышения величины α_{ij} следует ожидать вблизи температуры фазовых переходов в сегнетоэлектрическое и (или) ферромагнитное состояние, где расходятся величины χ_{ii}^e и χ_{jj}^m соответственно.

То же относится к области температур вблизи точки перехода в тороидное состояние, что наблюдается в борацитах [71].

Все вышеприведённые результаты относятся в равной степени и к тороидным состояниям, обусловленным соответствующим спиновым упорядочением.

Компоненты вектора \mathbf{T} , а следовательно, и компоненты магнитоэлектрического тензора преобразуются [72]:

а) по одному из одномерных неприводимых представлений, если вектор \mathbf{T} направлен вдоль главной оси симметрии;

б) по двумерному неприводимому представлению, если вектор \mathbf{T} расположен в плоскости, перпендикулярной главной оси;

в) по трёхмерному неприводимому представлению, например, в кубических кристаллах.

В работе [69] показано, что при наличии диссипации вектор $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, являющийся без диссипации источником (вместе с током \mathbf{j}) для тороидного параметра порядка, ответственным за магнитоэлектрический эффект, служит также источником для электрической поляризации, а следовательно, для сегнетоэлектрического параметра порядка.

В то же время вектор \mathbf{E} , являющийся без диссипации источником электрической поляризации \mathbf{P} , в условиях диссипации, из-за изменения функции распределения электронов служит источником тороидного параметра порядка \mathbf{T} . В результате в точке фазового перехода в тороидное состояние расходится фотопроводимость. В нелинейном отклике на электрическое поле в проводимости σ появляется линейный по E член (вместо обычного квадратичного). В работе [69] рассмотрены и другие аномальные нелинейные эффекты.

В работах [73, 74] было показано, что в полупроводниковых асимметричных гетероструктурах возможен достаточно большой магнитоэлектрический эффект. Обзор экспериментальных работ по этой тематике дан в [75].

6. Диамагнитные аномалии в неоднородном тороидном состоянии

В.Л. Гинзбургом ещё в 1952 г. [76] был поставлен вопрос о возможности существования состояний, обладающих свойствами идеального диамагнетика (сверхдиамагнетизм) подобно сверхпроводникам, но имеющих нормальное сопротивление.

Заметим, что до создания микроскопической теории сверхпроводимости [21] были попытки объяснить природу сверхпроводящего состояния путём введения тока \mathbf{j}

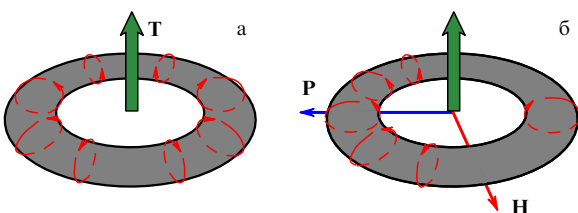


Рис. 4.

как параметра порядка. Прецессия макроскопических контуров с током в магнитном поле могла бы быть ответственной за большой диамагнетизм, однако для этого необходима жёсткость волновых функций, которая исключила бы парамагнитную составляющую. Это, как известно, и имеет место в сверхпроводниках.

Существование же тока \mathbf{j} (в том числе и неоднородного) как параметра порядка противоречит (как уже отмечалось в разделе 2) условию калибровочной инвариантности. В разделе 5 было показано, что полоидальная конфигурация токовых контуров в элементарной ячейке тороидного состояния (см. формулу (5)) приводит к ослаблению парамагнитной составляющей за счёт возникновения электрической поляризации (см. рис. 4). Одновременно элементарное, но физически прозрачное рассмотрение [10] показывает, что из-за квадратичной зависимости тороидного момента (см. (5)) от \mathbf{r} под знаком суммы вместо линейной зависимости от \mathbf{r} в выражении для магнитного момента возрастает (в два раза) диамагнитная составляющая.

6.1. Подавление парамагнитной составляющей в отклике на магнитное поле

Для контура с током плотности I и площадью S намагниченность $M = AIS$, где A — безразмерная константа. Парамагнитная компонента отклика на магнитное поле $\delta M_s = A I \delta S$ связана с изменением проекции контура на перпендикулярное магнитному полю направление. Диамагнитная компонента $\delta M_I = AS \delta I$ обусловлена изменением тока в контуре. В случае магнитного момента $M \approx \int \mathbf{j} r d^3 r$ или неоднородного ферромагнитного состояния, когда $\mathbf{I} = \text{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r})$, плотность тока можно выразить через характерный размер контура $I \sim M/\rho$.

Тогда $\delta M_I \sim -AM\delta\rho$, $\delta M_s \sim 2AM\delta\rho$ ($\delta\rho$ — изменение характерного размера под действием поля). Полное изменение намагниченности $\delta M = \delta M_I + \delta M_s \sim AM\delta\rho$, т.е. отклик контура парамагнитен.

В случае же тороидного момента (см. (5)) или неоднородного тороидного упорядочения, когда $\mathbf{I} \sim \text{rot} \text{rot} \mathbf{T}(\mathbf{r})$, плотность тока \mathbf{I} выражается через характерный размер контура как $\mathbf{I} \sim \mathbf{T}/\rho^2$. В этом случае

$$\delta M_I \sim -\frac{2AT}{\rho} \delta\rho, \quad \delta M_s \sim \frac{2AT}{\rho} \delta\rho,$$

т.е. $\delta M = \delta M_I + \delta M_s \equiv 0$.

Хотя выше говорилось и о неоднородном тороидном состоянии, проделанная оценка фактически соответствует однородному состоянию $\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \text{const}$, поскольку характерный размер ρ и величина \mathbf{T} в вышеприведённых оценках считались не зависящими от координаты. В этом случае аномальная восприимчивость вблизи точки фазового перехода в тороидное состояние имеет место только в отклике на внешний ток как на термодинамически сопряжённое к тороидному упорядочению внешнее поле.

Это относится и к $\text{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j}$, т.е. аномальный отклик существует только на неоднородное магнитное поле.

Неучтённый в наших оценках эффект ослабления парамагнитной составляющей из-за возникающей электрической поляризации должен привести к преобладанию диамагнитной составляющей. Строгое рассмотрение этого вопроса на основе баланса сил вблизи темпера-

туры фазового перехода и на основе модели экситонного диэлектрика при нулевой температуре (приведённое в разделе 6.2) подтверждает это заключение.

Прежде всего отметим, что макроскопическая модель с соблюдением калибровочной инвариантности подтвердила, что отклик однородного тороидного состояния на неоднородное магнитное поле имеет аномальное поведение парамагнитного знака [77].

6.2. Токовая прецессия неоднородных тороидных состояний (условие баланса сил)

Перейдём к строгому изучению вопроса об отклике на однородное магнитное поле неоднородного тороидного состояния $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ с макроскопическим током $\mathbf{I} \sim \text{rot} \text{rot} \mathbf{T}(\mathbf{r})$.

Использованная в [77] процедура минимизации функционала свободной энергии правильно описывает реакцию тороидного состояния на неоднородное магнитное поле. Фактически она носит статический характер и не учитывает динамические эффекты, связанные с поведением в магнитном поле контура и линий тока как целых. Соответственно в классическом смысле не учитывается прецессия в контуре и связанная с ней диамагнитная составляющая δM_I отклика. С формальной точки зрения отсутствие реакции на однородное поле связано с необходимостью возникающего интегрирования по частям градиентных членов от $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ при минимизации функционала. При этом отбрасывается поверхностный вклад, который и содержит информацию о реакции системы на внешнее однородное поле. Это следует из выражения

$$\delta F_a \sim - \int d^3 r \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{T}$$

для взаимодействия с полем, которое при $\mathbf{B} = \text{const}$ является полной производной и сводится к интегралу по поверхности. В работе [78] предложена схема баланса сил. Она позволяет локально и в явном виде учитывать граничные условия. Основной идеей предложенного подхода является описание взаимодействия системы с полем в терминах не энергетических, как это обычно делается, а силовых характеристик. Включение поля приводит к появлению внешней силы. Равновесное значение параметра порядка определяется из условия баланса внешних и внутренних сил. Последние возникают в результате деформации системы, т.е. появления в параметре порядка индуцированной компоненты \mathbf{T}_{ind} . Как внешние, так и внутренние силы возникают лишь в меру производных по координате от параметра порядка $\mathbf{T}(\mathbf{r})$.

Ограничимся в выражении для свободной энергии $F(\mathbf{R})$ в отсутствие поля только первыми производными $\nabla \mathbf{T}(\mathbf{R})$:

$$F(\mathbf{R}) \equiv F(\mathbf{T}(\mathbf{R}), \nabla \mathbf{T}(\mathbf{R})).$$

Для описания реакции системы на внешнюю силу надо исключить из свободной энергии энергию внутренних напряжений f_{int} . Эти напряжения имеются в отсутствие внешней силы и вызваны одной из причин пространственной неоднородности $\mathbf{T}(\mathbf{R})$:

$$f_{\text{int}}(\mathbf{R}) = \nabla F(\mathbf{R}). \quad (46)$$

Минимум $F(\mathbf{R})$ определяется из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{T}} = 0. \quad (47)$$

Определив с помощью уравнения (47) величину $F(\mathbf{R})$ и затем величину f_{int} из (46), получим условие равновесия без внешней силы

$$U(\mathbf{R}) \equiv F - \nabla \mathbf{T} \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla \mathbf{T}} \right) = \text{const}. \quad (48)$$

Равенство (48) означает, что плотность свободной энергии за вычетом энергии неоднородности сохраняет постоянное значение по \mathbf{R} .

Уравнение (48) удобно представить в виде

$$\nabla U(\mathbf{R}) = 0. \quad (49)$$

Включение внешней силы приводит к замене выражения (49) на следующее:

$$\nabla U(\mathbf{R}) = f_{\text{ext}}, \quad (50)$$

что является основным соотношением схемы баланса сил.

Для интересующего нас случая уравнение (50) принимает следующий вид:

$$\frac{dU}{d\mathbf{R}} = \frac{e}{m_0} \tilde{\gamma} [\mathbf{B} \text{rot rot } \mathbf{T}], \quad (51)$$

где коэффициент $\tilde{\gamma}$ определяется деталями микроскопической модели.

В левой части (51) стоит сила, возникающая в результате смещения внутренних координат на $\delta \mathbf{R}$ в направлении внешней силы, т.е. в направлении совершения над телом работы. В правой части (51) стоит сила Лоренца, работу не производящая. Кажущееся противоречие разрешается тем, что в движущемся во время смещения внутренних координат под действием силы Лоренца элементе объёма индуцируется электрическое поле $\mathbf{E} = [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ (где $V = \partial \mathbf{R} / \partial t$ — скорость движения), производящее за время δt работу [79]

$$\delta A = \mathbf{E} \mathbf{j} \delta t = -[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \delta \mathbf{R}.$$

Это и объясняет упомянутое выше проявление динамических эффектов. Система с током перестраивается, пока сила Лоренца не уравновесится внутренними напряжениями (за исключением внутренних напряжений, существовавших в системе из-за неоднородности $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ без внешней силы). Таким образом, условие (51) описывает ситуацию, сложившуюся в результате динамического эффекта — перестройки токовых контуров, что сводится к появлению в системе диамагнитного поверхностного тока.

В работе [78] на основе изложенного выше подхода рассмотрены три случая неоднородностей $\mathbf{T}(\mathbf{R})$ вблизи температуры фазового перехода в тороидное состояние.

Первый случай соответствует неоднородностям, связанным с антисимметричными граничными условиями вдоль направления x для равновесного параметра $T_0(-\infty) = -T_0(\infty)$.

Решение уравнения (47) имеет в этом случае вид

$$T_0(x) = T_0 \tanh\left(\frac{x}{\xi_{\text{tor}} \sqrt{2}}\right), \quad \xi_{\text{tor}}^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}, \quad T_0^2 = -\frac{\alpha}{2\beta}. \quad (52)$$

Коэффициенты α , β , γ определяют выражение для плотности свободной энергии без внешнего поля

$$F(\mathbf{T}, \nabla \mathbf{T}) = \alpha |\mathbf{T}|^2 + \beta |\mathbf{T}|^4 + \gamma |\nabla \mathbf{T}|^2. \quad (53)$$

Решению (52) соответствует доменная стенка, при этом спонтанный ток и действующая на него сила Лоренца равны нулю на $\pm \infty$.

Первый интеграл уравнения (51) имеет вид

$$\gamma (\nabla T)^2 - \left(\frac{e}{m_0}\right) \tilde{\gamma} B \nabla T - \beta (T_0^2 - T^2) = 0. \quad (54)$$

Отсюда получим неявное выражение для $T(x)$:

$$x = 2\gamma \int_0^T dT \left\{ \tilde{\gamma} \frac{e}{m_0} B - \left[\frac{e^2}{m_0^2} \tilde{\gamma}^2 B^2 + 4\beta\gamma (T_0^2 - T^2)^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1/2}.$$

Для линейного по B вклада $T_1(x)$ имеем $T_1(\pm \infty) = 0$, $T_1(x) = -T_1(-x)$, $T_1(0) = 0$.

Из выражения (54) можно получить асимптотики в нуле и на бесконечности:

$$T_1(x \rightarrow 0) \sim \frac{e\tilde{\gamma}}{2\gamma m_0} x B, \quad \max T_1(x \gg \xi_{\text{tor}}) \sim \frac{e\tilde{\gamma}}{m_0(\gamma\alpha)^{1/2}} B. \quad (55)$$

Тогда для восприимчивости χ' получаем следующую оценку:

$$\chi' = c \left(\frac{m^*}{m_0}\right)^2 |\mathbf{p}_{12}|^2 \xi_0^2 \chi_L, \quad (56)$$

где c — концентрация доменных стенок, $\gamma \sim \xi_0^2$, ξ_0 — корреляционная длина параметра порядка, $\chi_L = -e^2 k_F / 12\pi^2 m_0$ — диамагнитная восприимчивость Ландау, k_F — фермиевский импульс.

Если ввести характерный масштаб токовых корреляций $\lambda_{\text{tor}} = \xi_0 |\mathbf{p}_{12}| / k_F$, то для χ' имеем

$$\chi' = \chi_L \left(\frac{\lambda_{\text{tor}}}{r_a}\right)^2, \quad (57)$$

где r_a — порядка межатомного расстояния.

Согласно известной формуле Ланжевена диамагнитная восприимчивость индивидуального электрона пропорциональна площади описываемой им орбиты, однако число орбит на единицу площади в свою очередь обратно пропорционально площади орбит. Поэтому большой радиус орбиты не может обеспечить большого значения восприимчивости в пересчёте на единицу объёма. В рассматриваемой модели $\xi_0 \gg r_a$ ситуация аналогична теории БКШ [21], когда имеется вложение друг в друга большого числа электронно-дырочных пар.

В то же время при механическом вложении орбит одной в другую эффект взаимной индукции также поощряет увеличение диамагнетизма. Аномально большой диамагнетизм при $\lambda_{\text{tor}} \gg r_a$, полученный для неоднородного тороидного состояния, соответствует такому вложению орбит радиуса λ_{tor} , при котором межэлектронные корреляции подавляют эффект взаимной индукции.

В качестве второго примера в [78] был рассмотрен случай, когда неоднородное состояние $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ связано не с граничными условиями, а с изменением знака коэффициента γ при градиентном члене, т.е. вблизи точки Лифшица. В модели экситонного диэлектрика такая ситуация реализуется при нарушении условия нестинга $\varepsilon_1(p) = -\varepsilon_2(p)$, например за счёт легирования [80, 81].

Пространственный масштаб соответствующей неоднородности может изменяться в широких пределах, начиная с удвоения периода. Такие состояния являются фактически антитороидными, тороидный момент периодически меняет знак. Антитороидные состояния и служат примером систем с аномально большим диамагнетизмом.

С точки зрения магнитоэлектрических свойств антитороидные состояния интереса не представляют.

Выражение для восприимчивости при этом совпадает с (57) с точностью до численного множителя порядка единицы и $c \equiv 1$. Особо следует выделить случай с так называемой встроенной неоднородностью, когда масштаб неоднородности является заданным, а не находится самосогласованным образом, как это было в рассмотренных выше обоих случаях.

В случае встроенной неоднородности величина $\lambda_{\text{тор}} \sim \xi(T)$, где

$$\xi(T) = \xi_0 \left(\frac{T_c}{T_c - T} \right)^{1/2} \quad (58)$$

и токовая корреляционная длина $\lambda_{\text{тор}}$ расходится вместе с $\xi(T)$ при приближении температуры T к температуре фазового перехода T_c , т.е. вблизи температуры фазового перехода система становится идеальным диамагнетиком.

Имеются основания надеяться, что именно этот режим может быть реализован в полупроводниковой гетероструктуре [70, 74, 75], но периодически повторяющейся, т.е. такая система будет обладать антитороидным упорядочением.

В кристаллах LiCoPO_4 с тороидным упорядочением наблюдается доменная структура [82]. Однако удельный вес доменных стенок, в которых возникает спонтанный ток и которые могли бы быть ответственными за аномальный диамагнетизм, достаточно мал, чтобы проявиться в суммарной восприимчивости.

Таким образом, неоднородное тороидное, в частности антитороидное, состояние является примером реализации идей В.Л. Гинзбурга, когда аномально большой диамагнетизм (сверхдиамагнетизм) имеет коллективную, но не сверхпроводящую природу. Приведённое выше феноменологическое исследование диамагнитной восприимчивости вблизи T_c справедливо при любом из рассмотренных выше механизмов образования тороидного состояния.

В работе [78] решена также задача о магнитной восприимчивости в постоянном магнитном поле при нулевой температуре в модели экситонного диэлектрика.

Нетривиальность задачи состоит в том, что для строгого контроля выполнения условия калибровочной инвариантности, гарантирующего достоверность получающегося результата, необходимо знать электронный спектр для неоднородного тороидного состояния.

Качественно получающиеся результаты для χ' при нулевой температуре согласуются с полученными выше для $T \leq T_c$ [83].

6.3. Осцилляции де Гааза – ван Альфена в эффективном внутреннем магнитном поле — диамагнитная гигантская дифференциальная восприимчивость в слабом внешнем магнитном поле

В работе [84] анализируется иная причина аномально большого диамагнетизма, обусловленного проявлением в неоднородном тороидном состоянии эффективного магнитного (псевдомагнитного) поля B_{eff} , определяемого производными первого порядка от $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ вместо рассмотренных в разделе 6.2 случаев прецессии токов, определяемых вторыми производными.

Представлена квазидвумерная двухзонная модель с анизотропной межзонной гибридизацией $\mathbf{P}\mathbf{k}$. В законе дисперсии для каждой из зон $i = 1, 2$, $\varepsilon_i(\mathbf{k}) = \varepsilon_i(k_x k_z) + \varepsilon_i(k_y)$ пренебрегается дисперсией по k_y по сравнению с дисперсией гибридизации, отличной от нуля только в направлении k_y : $|\varepsilon_i(k_y)| \ll |Pk_y|/m_0$.

В этом случае эффективный редуцированный гамильтониан для синглетного мнимого параметра $\Delta(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{H}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\hat{k}_x \hat{k}_z) & i \left(\frac{1}{m_0} Pk_y + \Delta(\mathbf{r}) \right) \\ -i \left(\frac{1}{m_0} Pk_y + \Delta(\mathbf{r}) \right) & \varepsilon_2(\hat{k}_x, \hat{k}_z) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Параметр $\Delta(\mathbf{r})$ входит в \hat{H}_{red} полностью аналогично вектор-потенциалу, направленному вдоль оси y .

После преобразования

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{Pe}{m_0 c} A_{\text{eff}}, \quad \mathbf{A}_{\text{eff}} = (0, A_{\text{eff}}, 0)$$

гамильтониан \hat{H}_{red} совпадает с гамильтонианом двухзонной модели в псевдомагнитном поле B_{eff} :

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\text{eff}} = \left(-\frac{cm_0}{eP} \nabla_z \Delta(\mathbf{r}), 0, \frac{cm_0}{eP} \nabla_x \Delta(\mathbf{r}) \right). \quad (60)$$

При пренебрежении зависимостью $B_{\text{eff}}(\mathbf{r})$ от \mathbf{r} (что соответствует пренебрежению спонтанными токами $\mathbf{j} \sim \text{rot rot } \mathbf{P}\Delta(\mathbf{r})$, которые определяют диамагнитную восприимчивость (56)) можно воспользоваться методами вычисления макроскопических характеристик однородной системы в однородном внешнем магнитном поле \mathbf{B} . Истинное магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ вводится в гамильтониан (59) заменой $\mathbf{A}_{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{A}_{\text{eff}} + \mathbf{A}$.

Магнитная восприимчивость определяется совместным действием истинного и псевдомагнитного поля $\mathbf{B}_{\Sigma} = \mathbf{B}_{\text{eff}} + \mathbf{B}$. Величина псевдомагнитного поля в масштабе истинного магнитного поля может быть достаточно большой.

Тогда магнитная восприимчивость системы с неоднородным $\Delta(\mathbf{r})$ в слабом магнитном поле совпадает с дифференциальной восприимчивостью системы с $\Delta = 0$, помещённой в сильное поле B_{eff} . В случае низкой температуры T , когда $k_B T \ll \mu_B B_{\text{eff}}$ (k_B — постоянная Больцмана, μ_B — магнетон Бора), система будет находиться в условиях эффекта де Гааза – ван Альфена. При этом дифференциальная восприимчивость (равная искомой восприимчивости χ'), как известно [85], может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине значения, как положительные (парамагнетизм), так и отрицательные (диамагнетизм). Правда, в отличие от стандартной ситуации поле B_{eff} , вообще говоря, неодно-

родно (именно его неоднородность соответствует существованию тока и его прецессии). Это напоминает ситуацию по эффекту де Гааза – ван Альфена при наличии диамагнитных доменов Шенберга. Однако возможна ситуация, когда неоднородностью B_{eff} можно пренебречь [86]. Для этого масштаб неоднородностей (в нашем случае — это масштаб изменения $\Delta(\mathbf{r})$), три примера которых были рассмотрены в разделе 6.2, должен быть большим по сравнению с эффективной магнитной длиной псевдомагнитного поля

$$\lambda = \frac{ck_F}{eB_{\text{eff}}}.$$

Тогда при выполнении условия

$$\frac{\mu_B B_{\text{eff}}}{E_F} \ll 1$$

осциллирующая с изменением B_{eff} часть восприимчивости оказывается много больше плавной части и интересующая нас восприимчивость χ' на внешнее поле B будет равна осциллирующей компоненте:

$$\chi' = a \cos \frac{E_F}{\mu_B B_{\text{eff}}}, \quad a = \left(\frac{e}{c}\right)^{1/2} \frac{E_F^2 m_0}{(2\pi^5 B_{\text{eff}})^{1/2}} \frac{\kappa}{\sin \kappa}, \quad (61)$$

где

$$\kappa = \frac{2\pi^2 T}{\mu_B B_{\text{eff}}}.$$

Из выражения (61) следует, что для одних значений B_{eff} , соответствующих положительному полупериоду косинуса, восприимчивость положительна (парамагнитна), а для других значений B_{eff} , соответствующих отрицательному полупериоду, она отрицательна (диамагнитна). В пределе $a \rightarrow \infty$ восприимчивость χ' стремится к восприимчивости идеального диамагнетика $\chi' \rightarrow -\infty$ ($\chi \rightarrow 1/4\pi$).

В отличие от задачи в реальном сильном магнитном поле, в рассматриваемом случае величина B_{eff} зависит от параметров системы, которые и определяют знак полупериода, а значит, и знак восприимчивости. В принципе возможна ситуация, когда с изменением температуры изменится знак χ' вследствие изменения $\Delta(\mathbf{r})$.

По-видимому, условия реализации аномального диамагнетизма за счёт псевдомагнитного поля B_{eff} (пространственных производных от $\Delta(\mathbf{r})$ первого порядка (60)) являются более жёсткими по сравнению с проявлением токовой прецессии (пространственных производных $\Delta(\mathbf{r})$ второго порядка (10)).

6.4. Сосуществование тороидного и сверхпроводящего состояний

Своеобразное проявление тороидного состояния имеет место при сосуществовании его со сверхпроводимостью [84]. Это сосуществование можно строго описать в рамках всё той же модели экситонного диэлектрика, что для действительного синглетного электронно-дырочного параметра Δ_{Rc}^s было впервые исследовано в работах [87, 88]. Сосуществование сверхпроводимости с диэлектрической фазой со спонтанными токами изуча-

лось в связи со сверхпроводимостью купратов [45–47, 55, 56, 61].

В работе [84] выявлен ряд особенностей во взаимодействии сверхпроводящего и тороидного состояний, ранее не изучавшихся.

В сверхпроводниках, как известно, нарушается обычное условие калибровочной инвариантности. Роль же калибровочно-инвариантной величины играет сочетание $\nabla\varphi - (2e/c)\mathbf{A}$ (φ — фаза сверхпроводящего параметра порядка Δ_c), которое может явно присутствовать в макроскопических соотношениях.

Для сверхпроводящего тока \mathbf{j}_c в этом случае получается следующее выражение:

$$\mathbf{j}_c = \eta \left(\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\mathbf{A} - e\xi\mathbf{T} \right), \quad (62)$$

где величина $\eta \sim |\Delta_c|^2$ пропорциональна плотности сверхпроводящих электронов, $\xi \sim 1/v_F$.

Поэтому в выражении для свободной энергии появляется слагаемое

$$\delta F \sim i\Gamma \left(\Delta_c \left(\nabla - i \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \Delta_c^* - \text{к.с.} \right). \quad (63)$$

Расчёт в модели экситонного диэлектрика с $P \neq 0$, $\Delta_{\text{Im}}^s \neq 0$ приводит к следующему дополнительному слагаемому в выражении для тока:

$$\mathbf{j} = \frac{7}{8} \zeta(3) \frac{ek_F |\Delta_c|^2}{\pi^4 T^2} \mathbf{P} \Delta_{\text{Im}}^s, \quad (64)$$

где $\zeta(3)$ — дзета-функция Римана.

Из выражения (62) получим следующее уравнение для фазы:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = e\xi \text{div } \mathbf{T}. \quad (65)$$

Тогда у Δ_c появляется дополнительный фазовый множитель

$$\Delta_c(\mathbf{r}) = |\Delta_c(\mathbf{r})| \exp \left\{ i\xi e \int_0^r \mathbf{T}_{\parallel}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\}, \quad (66)$$

$\mathbf{T}_{\parallel}(\mathbf{r})$ — безвихревая компонента тороидного параметра порядка ($\text{rot } \mathbf{T}_{\parallel}(\mathbf{r}) \equiv 0$), при $\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \text{const}$ следует считать $\mathbf{T}_{\parallel} = \mathbf{T}$.

В разомкнутой системе эта фаза полностью компенсирует дополнительный член в выражении для тока, не меняя параметры эффекта Мейснера.

Для замкнутого контура, состоящего из обычного сверхпроводника и сверхпроводника с сосуществующим тороидным упорядочением, получается следующее выражение для магнитного потока через контур:

$$\Phi = \Phi_0 \left\{ n - \frac{e\xi}{2\pi} \int \mathbf{T}_{\parallel}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\}, \quad (67)$$

где n — целое число.

Если второе слагаемое в скобках не равно n , то в меру $\Phi \neq 0$ в контуре возникает спонтанный ток $I = cL^{-1}\Phi$, где L — индуктивность контура.

Интересно проявление в сверхпроводящем состоянии вихревой компоненты тороидного момента \mathbf{T} с $\text{rot } \mathbf{T} \neq 0$.

Если к выражению (62) для тока применить операцию rot , то получим изменённое уравнение Лондона

$$\text{rot } A^2 \mathbf{j}_c = -c^{-1} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \xi \text{rot } \mathbf{T}, \quad (68)$$

где $A^2 = 2e\eta$, $\chi_L = (Ac)/(4\pi)^{1/2}$.

Уравнение Максвелла имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c + 4\pi \text{rot rot } \mathbf{T}. \quad (69)$$

Тогда из уравнений (68) и (69) получим

$$-\nabla^2 \mathbf{j}_c - \frac{\mathbf{j}_c}{\lambda_L^2} = \frac{c}{\lambda_L^2} \text{rot rot } \mathbf{T} + \frac{c^2 \xi}{\lambda_L^2} \text{rot rot } \mathbf{T}. \quad (70)$$

Второе слагаемое в правой части (70) обусловлено прямым взаимодействием сверхпроводящего и тороидного параметров порядка, его вклад из-за $c\xi \sim c/v_F \gg 1$ существенно превышает первое слагаемое, которое является аналогом члена с $\text{rot } \mathbf{M}$ в случае сосуществования сверхпроводимости и ферромагнетизма [89].

Если температура сверхпроводящего T_c и тороидного $T_{\text{тор}}$ фазовых переходов близки, то линеаризованное уравнение для A_c имеет вид

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - e\xi \mathbf{T}(\mathbf{r}) \right)^2 A_c = -\alpha A_c, \quad (71)$$

где $\alpha \sim (T - T_c)$.

Это приводит к особой структуре проникновения магнитного поля в сверхпроводник и к немонотонной температурной зависимости второго критического магнитного поля H_{c2} [84].

7. Коллективные колебания и оптические свойства тороидных состояний

Для описания взаимодействия тороидных состояний с электромагнитным полем необходимо исследовать коллективные моды тороидных колебаний, что было выполнено на феноменологическом уровне в работах [90, 91]. Если взаимодействие с магнитной компонентой электромагнитной волны происходит в меру слагаемого $\mathbf{T} \text{rot } \mathbf{B}$ в выражении для свободной энергии, то взаимодействие с электрической компонентой \mathbf{E} пропорционально $\mathbf{T} d\mathbf{E}/dt$. Это соответствует появлению электрической поляризации \mathbf{P} , пропорциональной $d\mathbf{T}/dt$. В результате в выражении для диэлектрической поляризации $\epsilon(\omega)$ появляется резонанс, соответствующий одной из мод тороидных колебаний. В работах [90, 91] предсказана характерная особенность в температурной зависимости коэффициента поглощения, которая наблюдается в соединении TiGaSe_2 [92].

В меру взаимодействия $\mathbf{T} \text{rot } \mathbf{B}$ тороидные колебания проявляются также в частотной зависимости магнитной проницаемости $\mu(\omega)$. В работе [93] изучено влияние тороидных колебаний на угол вращения плоскости поляризации электромагнитной волны (см. также [94]). Подобные вопросы были изучены в уже упоминавшейся работе [57] на основе модели Хаббарда.

Поскольку $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ могут иметь либо близкие, либо совпадающие по частоте резонансы, то это, кроме упоминавшейся возможности высокого значения магнитоэлектрического коэффициента α , может приводить к

существованию области частот с отрицательным коэффициентом преломления $n(\omega)$. Таким образом, тороидные состояния представляют интерес с точки зрения реализации метаматериалов [95].

В случае неоднородного тороидного состояния ($\text{rot } \mathbf{T}(\mathbf{r}) \neq 0$) в уравнении, описывающем траекторию луча света в рамках геометрической оптики, появляется пропорциональное $\text{rot } \mathbf{T}(\mathbf{r})$ слагаемое, приводящее к эффекту Холла для света: направление отклонения луча меняется с изменением направления луча [96].

Подробную информацию о веществах с тороидным упорядочением и экспериментальных методах их исследования можно найти в обзорах [17, 64]. Особо следует выделить работу [97], в которой тороидное упорядочение наблюдалось впервые.

8. Заключение

Таким образом, аномальная диамагнитная составляющая в отклике на однородное магнитное поле существует только в области неоднородности тороидного состояния, т.е. в области доменных стенок. Хотя последние (как было указано выше) наблюдаются в тороидном состоянии [82], однако доменные стенки занимают малую долю образца и потому их вклад в суммарную восприимчивость ничтожен. Антитороидное же состояние, в котором должен проявиться большой диамагнетизм, пока не обнаружено.

В настоящее время нами предложены (и начато их исследование) гетероструктуры, аналогичные тем, в которых наблюдалось тороидное состояние с большим магнитоэлектрическим эффектом [74, 75], но периодически повторяющиеся. В этом случае доля доменных стенок оказывается порядка единицы.

От имени сотрудников, участвовавших в построении теории тороидных состояний и изучении их свойств, хочу выразить благодарность В.Л. Гинзбургу за активное участие в совместной работе и стимулирующую поддержку. Надеюсь, что мечта Виталия Лазаревича о сверхдиамагнетизме несверхпроводящей природы в ближайшее время превратится в реальность.

Список литературы

1. Wigner E P *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* 546 (1932)
2. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* 33 1531 (1957) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* 6 1184 (1958)]
3. Ascher E *Helv. Phys. Acta* 39 40 (1966)
4. Ascher E *Int. J. Magn.* 5 287 (1974)
5. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* 4 43 (1933)
6. Heisenberg W *Z. Naturforsch. A* 2 185 (1947)
7. Heisenberg W *Ann. Physik* 3 289 (1948)
8. Koppe H *Ergebnisse exakten Naturwissensch.* 23 283 (1950)
9. Kittel C *Quantum Theory of Solids* (New York: Wiley, 1963) [Киттель К *Квантовая теория твердых тел* (М.: Наука, 1967)]
10. Ginzburg V L et al. *Solid State Commun.* 50 339 (1984)
11. Dubovik V M, Cheshkov A A, Preprint R2-5283, R2-5284 (Dubna: JINR, 1970)
12. Dubovik V M, Tugushev V V *Phys. Rep.* 187 145 (1990)
13. Apenko S M, Lozovik Yu E *J. Phys.* B 15 L57 (1982)
14. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Т. 1 (М.: Наука, 1976) [Landau L D, Lifshits E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
15. Андреев А Ф, Гришук И А *ЖЭТФ* 87 467 (1984) [Andreev A F, Grishchuk I A *Sov. Phys. JETP* 60 267 (1984)]
16. Горбачевич А А, Копяев Ю В *Письма ЖЭТФ* 39 558 (1984) [Gorbatsevich A A, Kopyaev Yu V *JETP Lett.* 39 684 (1984)]

17. Spaldin N A, Fiebig M, Mostovoy M *J. Phys.: Condens. Matter* **20** 434203 (2008)
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1976) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
19. Halperin B I, Rice T M *Solid State Phys.* **21** 115 (1968)
20. Келдыш Л В, Копаев Ю В *ФТТ* **6** 2791 (1964) [Keldysh L V, Kopaev Yu V *Sov. Phys. Solid State* **6** 2219 (1965)]
21. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
22. Боголюбов Н Н, Толмачев В В, Ширков Д В *Новый метод в теории сверхпроводимости* (М.: Изд-во АН СССР, 1958) [Bogolyubov N N, Tolmachev V V, Shirkov D V *A New Method in the Theory of Superconductivity* (New York: Consultants Bureau, 1959)]
23. Гусейнов Р Р, Келдыш Л В *ЖЭТФ* **63** 2255 (1972) [Guseinov R R, Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **36** 1193 (1973)]
24. Волков Б А, Горбачевич А А, Копаев Ю В *УФН* **143** 331 (1984) [Volkov B A, Gorbachevich A A, Kopaev Yu V *Sov. Phys. Usp.* **27** 464 (1984)]
25. Волков Б А, Копаев Ю В, Нунупаров М С *ФТТ* **21** 2733 (1979) [Volkov B A, Kopaev Yu V, Nunuparov M S *Sov. Phys. Solid State* **21** 1571 (1979)]
26. Копаев Ю В, Нунупаров М С *ФТТ* **22** 3599 (1980)
27. Горбачевич А А, Копаев Ю В, Прокопов В И *ФТТ* **26** 1155 (1986)
28. Волков Б А и др. *ЖЭТФ* **81** 729 (1981) [Volkov B A et al. *Sov. Phys. JETP* **54** 391 (1981)]
29. Горбачевич А А, Тугушев В В *ЖЭТФ* **77** 2104 (1979) [Gorbachevich A A, Tugushev V V *Sov. Phys. JETP* **50** 1006 (1979)]
30. Горбачевич А А, Тугушев В В *ЖЭТФ* **78** 1945 (1980) [Gorbachevich A A, Tugushev V V *Sov. Phys. JETP* **51** 977 (1980)]
31. Артамонов Ю А, Горбачевич А А, Копаев Ю В *Письма ЖЭТФ* **40** 290 (1984) [Artamonov Yu A, Gorbachevich A A, Kopaev Yu V *JETP Lett.* **40** 1076 (1984)]
32. Волков Б А, Копаев Ю В *Письма ЖЭТФ* **27** 10 (1978) [Volkov B A, Kopaev Yu V *JETP Lett.* **27** 7 (1978)]
33. Батыев Э Г *Письма ЖЭТФ* **29** 381 (1979) [Batyev E G *JETP Lett.* **29** 345 (1979)]
34. Fenton E W *Solid State Commun.* **38** 457 (1981)
35. Nozières P, Saint-James D *J. Physique Lett.* **41** L197 (1980)
36. Волков Б А и др. *Письма ЖЭТФ* **30** 317 (1979) [Volkov B A et al. *JETP Lett.* **30** 293 (1979)]
37. Волков Б А, Канцер В Г, Копаев Ю В *ЖЭТФ* **76** 1856 (1979) [Volkov B A, Kantser V G, Kopaev Yu V *Sov. Phys. JETP* **49** 943 (1979)]
38. Горбачевич А А, Копаев Ю В *Письма ЖЭТФ* **39** 558 (1984) [Gorbachevich A A, Kopaev Yu V *JETP Lett.* **39** 684 (1984)]
39. Елесин В Ф, Копаев Ю В *Письма ЖЭТФ* **24** 78 (1976) [Elesin V F, Kopaev Yu V *JETP Lett.* **24** 66 (1976)]
40. Волков Б А, Копаев Ю В, Русинов А И *ЖЭТФ* **68** 1899 (1975) [Volkov B A, Kopaev Yu V, Rusinov A I *Sov. Phys. JETP* **41** 952 (1975)]
41. Cercellier H et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 146403 (2007)
42. Young D P et al. *Nature* **397** 412 (1999)
43. Balents L, Varma С М *Phys. Rev. Lett.* **84** 1264 (2000)
44. Barzykin V, Gor'kov L P *Phys. Rev. Lett.* **84** 2207 (2000)
45. Chakravarty S et al. *Phys. Rev. B* **63** 094503 (2001)
46. Varma С М *Phys. Rev. B* **55** 14554 (1997)
47. Varma С М *Phys. Rev. Lett.* **83** 3538 (1999)
48. Kaminski A et al. *Nature* **416** 610 (2002)
49. Fauque B et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 197001 (2006); cond-mat/0509210
50. Кротов С С, Тугушев В В *ЖЭТФ* **91** 1708 (1986) [Krotov S S, Tugushev V V *Sov. Phys. JETP* **64** 1010 (1986)]
51. Кротов С С, Тугушев В В *ДАН СССР* **295** 852 (1987) [Krotov S S, Tugushev V V *Sov. Phys. Dokl.* **32** 658 (1987)]
52. Kopaev Yu V, Krotov S S, Tugushev V V *Solid State Commun.* **61** 737 (1987)
53. Klebanoff L E et al. *J. Mag. Magn. Mater.* **54–57** 728 (1986)
54. Mills D "Surface spin waves on magnetic crystals", in *Surface Excitations* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 9, Eds V M Agranovich, R London) (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 379
55. Affleck I, Marston J B *Phys. Rev. B* **37** 3774 (1988)
56. Lee P A, Nagaosa N, Wen X-G *Rev. Mod. Phys.* **78** 17 (2006)
57. Bulaevskii L N et al. *Phys. Rev. B* **78** 024402 (2008)
58. Katsura H, Nagaosa N, Balatsky A *Phys. Rev. Lett.* **95** 057205 (2005); cond-mat/0412319
59. Померанчук И Я *ЖЭТФ* **35** 524 (1958) [Pomeranchuk I Ya *Sov. Phys. JETP* **8** 361 (1959)]
60. Varma С М, cond-mat/0311145
61. Белявский В И, Копаев Ю В *УФН* **176** 457 (2006) [Belyavskii V I, Kopaev Yu V *Phys. Usp.* **49** 441 (2006)]
62. Wu C, Zhang S-C *Phys. Rev. Lett.* **93** 36403 (2004); cond-mat/0312632
63. Hirsch J E *Phys. Rev. B* **41** 6820 (1990)
64. Fiebig M *J. Phys. D* **38** R123 (2005)
65. Debye P *Z. Phys.* **36** 300 (1926)
66. Curie P *J. Physique* **3** 393 (1894)
67. Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **37** 881 (1959) [Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **10** 628 (1960)]
68. Астров Д Н *ЖЭТФ* **38** 984 (1960) [Astrov D N *Sov. Phys. JETP* **11** 708 (1960)]
69. Горбачевич А А, Копаев Ю В, Тугушев В В *ЖЭТФ* **85** 1107 (1983) [Gorbachevich A A, Kopaev Yu V, Tugushev V V *Sov. Phys. JETP* **58** 643 (1983)]
70. Gorbachevich A A, Kopaev Yu V *Ferroelectrics* **161** 321 (1994)
71. Sannikov D G *Ferroelectrics* **219** 177 (1998)
72. Ascher E, in *Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals: Symp., Seattle, 1973* (Eds A J Freeman, H Schmid) (London: Gordon and Breach Sci. Publ., 1975)
73. Gorbachevich A A, Kopaev V V, Kopaev Yu V *Ferroelectrics* **161** 303 (1994)
74. Горбачевич А А, Копаев В В, Копаев Ю В *Письма ЖЭТФ* **57** 565 (1993) [Gorbachevich A A, Kopaev V V, Kopaev Yu V *JETP Lett.* **57** 580 (1993)]
75. Горбачевич А А, Омеляновский О Е, Цебро В И *УФН* **179** 887 (2009) [Gorbachevich A A, Omel'yanovskii O E, Tsebro V I *Phys. Usp.* **52** (8) (2009)]
76. Гинзбург В Л *УФН* **48** 25 (1952)
77. Волков Б А и др. *ЖЭТФ* **81** 1904 (1981) [Volkov B A et al. *Sov. Phys. JETP* **54** 1008 (1981)]
78. Волков Б А, Горбачевич А А, Копаев Ю В *ЖЭТФ* **86** 1870 (1984) [Volkov B A, Gorbachevich A A, Kopaev Yu V *Sov. Phys. JETP* **59** 1087 (1984)]
79. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) с. 184 [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
80. Копаев Ю В *ФТТ* **12** 3 (1970) [Kopaev Yu V *Sov. Phys. Solid State* **12** 1 (1970)]
81. Rice T M *Phys. Rev. B* **2** 3619 (1970)
82. Van Aken B B et al. *Nature* **449** 702 (2007)
83. Gorbachevich A A, Kopaev Yu V, in *Superconductivity, Superdiamagnetism, Superfluidity* (Ed. V L Ginzburg) (M.: Mir Publ., 1987)
84. Горбачевич А А *ЖЭТФ* **95** 1467 (1989) [Gorbachevich A A *Sov. Phys. JETP* **68** 847 (1989)]
85. Shoenberg D *Magnetic Oscillations in Metals* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984) [Шенберг Д *Магнитные осцилляции в металлах* (М.: Мир, 1986)]
86. Привороцкий И А *ЖЭТФ* **52** 1755 (1967) [Privorotskii I A *Sov. Phys. JETP* **25** 1167 (1967)]
87. Русинов А И, Кат Д Ч, Копаев Ю В *ЖЭТФ* **65** 1984 (1973) [Rusinov A I, Kat D Ch, Kopaev Yu V *Sov. Phys. JETP* **38** 991 (1974)]
88. Копаев Ю В, в сб. *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости* (Под ред. В Л Гинзбурга, Д А Киржница) (М.: Наука, 1977) Гл. 5 [Kopaev Yu V, in *High-Temperature Superconductivity* (New York: Consultants Bureau, 1982) Ch. 5
89. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **31** 202 (1956) [Ginzburg V L *Sov. Phys. JETP* **4** 153 (1957)]
90. Копаев Ю В, Тугушев В В *Письма ЖЭТФ* **41** 320 (1985) [Kopaev Yu V, Tugushev V V *JETP Lett.* **41** 392 (1985)]
91. Копаев Ю В, Тугушев В В *ЖЭТФ* **88** 2244 (1985) [Kopaev Yu V, Tugushev V V *Sov. Phys. JETP* **61** 1327 (1985)]

92. Волков А А и др. *Письма ЖЭТФ* **39** 293 (1984) [Volkov A A et al. *JETP Lett.* **39** 351 (1984)]
93. Тугушев В В, Фурса Т Н *ФТТ* **28** 1805 (1986)
94. Звездин А К *Краткие сообщения по физике ФИАН* (6) 35 (2000)
95. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967) [Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)]
96. Sawada K, Nagaosa N *Phys. Rev. Lett.* **95** 237402 (2005)
97. Попов Ю Ф и др. *ЖЭТФ* **114** 263 (1998) [Popov Yu F et al. *JETP* **87** 146 (1998)]

Toroidal ordering in crystals

Yu.V. Kopayev

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences

Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-499) 135-74 41

E-mail: kopayev@sci.lebedev.ru

Phase transitions are discussed occurring to ordered states that correspond to the toroidal family of multipoles known in electrodynamics. The ordering of toroidal moments may either occur simultaneously with their formation (as in superconductivity) or may follow it (at lower temperature). In addition to electrodynamic toroidal moments corresponding to poloidal charge currents or a spin configuration, a toroidal state corresponding to poloidal spin currents is possible.

PACS numbers: 01.30.Bb, **71.30.+h**, **75.10-b**, **75.80+q**

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200911d.1175

Bibliography — 97 references

Received 3 August 2009

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **179** (11) 1175 – 1190 (2009)

Physics – Uspekhi **52** (11) (2009)